Aufgabe 1: Energiesignale

(Energiesignale)

Für die Berechnung der Kenngrößen von Energiesignalen sind folgende Hilfssätze in der Praxis von Nutzen:

a) Zeigen Sie, dass sich jede beliebige reelle Funktion $x(t)$ durch die Summe einer geraden Funktion $x_g(t)$ und einer ungeraden Funktion $x_u(t)$ darstellen lässt.

b) Gegeben ist ein gerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.

c) Gegeben ist ein ungerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal ebenfalls eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.

d) Was ist die Konsequenz aus obigen Aussagen bezüglich der Zerlegung eines Signals $x(t)$ in seinen geraden $x_g(t)$ und in seinen ungeraden $x_u(t)$ Anteil?

e) Gegeben sei ein zeitlich verschobenes Energiesignal $x(t-T)$. Zeigen Sie, dass dessen mittlere Zeit t_x um den Wert $+T$, gegenüber der mittleren Zeit des nicht verschobenen Signals $x(t)$, vergrößert ist.

Lösung

a) Man betrachtet die Funktion $x(t)$ an der Stelle $+t$ und $-t$ und ersetzt sie jeweils durch die Summe aus einer geraden Hilfsfunktion $x_g(t)$ und einer ungeraden Hilfsfunktion $x_u(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_g(t) + x_u(t) \\ x(-t) &= x_g(-t) + x_u(-t) \\ &= x_g(t) - x_u(t) \end{aligned}$$

Dies sind zwei linear unabhängige Gleichungen für die zwei Unbekannten $x_g(t)$ und $x_u(t)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_g(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(+t) \\ x(-t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_g(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(+t) \\ x(-t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgen die Bestimmungsgleichungen für die gerade bzw. ungerade Teilfunktion.

$$\begin{aligned} x_g(t) &= \frac{1}{2}\big(x(+t) + x(-t)\big) \\ x_u(t) &= \frac{1}{2}\big(x(+t) - x(-t)\big) \end{aligned}$$

Allgemeiner Ansatz für die Teilaufgaben b) bis d): Die Definitionsgleichung für die mittlere Zeit wird geeignet umgeformt:

$$
\begin{aligned}
t_x &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2}\, dt = \frac{1}{E_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, |x(t)|^2 \; dt && \text{(L1)} \\
&= \frac{1}{E_x} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} t\, |x(t)|^2 \; dt + \int\limits_{0}^{\infty} t\, |x(t)|^2 \; dt \right] \\
&= \frac{1}{E_x} \left[- \int\limits_{\infty}^{0} (-\tau)\, |x(-\tau)|^2 \; d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} t\, |x(t)|^2 \; dt \right] \\
&= \frac{1}{E_x} \left[- \int\limits_{0}^{\infty} \tau\, |x(-\tau)|^2 \; d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} t\, |x(t)|^2 \; dt \right] \\
&= \frac{1}{E_x} \int\limits_{0}^{\infty} t \left[|x(t)|^2 - |x(-t)|^2 \right] \; dt && \text{(L2)}
\end{aligned}
$$

Die Funktion $x(t)$ wird in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegt:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_g(t) + x_u(t) \\
x(-t) &= x_g(t) - x_u(t)
\end{aligned}
$$

Für das Betragsquadrat folgt:

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^2 &= \big(x_g(t) + x_u(t)\big) \cdot \big(x_g^*(t) + x_u^*(t)\big) \\
&= |x_g(t)|^2 + x_g(t) x_u^*(t) + x_u(t) x_g^*(t) + |x_u(t)|^2 \\
&= |x_g(t)|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\left\{x_g(t) x_u^*(t)\right\} + |x_u(t)|^2 \\
|x(-t)|^2 &= \big(x_g(t) - x_u(t)\big) \cdot \big(x_g^*(t) - x_u^*(t)\big) \\
&= |x_g(t)|^2 - x_g(t) x_u^*(t) - x_u(t) x_g^*(t) + |x_u(t)|^2 \\
&= |x_g(t)|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}\left\{x_g(t) x_u^*(t)\right\} + |x_u(t)|^2
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Gl. (L2) ergibt:

$$
t_x = \frac{4}{E_x} \int\limits_{0}^{\infty} t \cdot \operatorname{Re}\left\{x_g(t) x_u^*(t)\right\} dt \qquad \text{(L3)}
$$

b) $x(t) = x_g(t) \quad \overset{\text{Gl. (L3)}}{\Longrightarrow} \quad t_x = 0$

c) $x(t) = x_u(t) \quad \overset{\text{Gl. (L3)}}{\Longrightarrow} \quad t_x = 0$

Anmerkung zu **a)** und **b)**: Dieses Ergebnis kann auch direkt aus der Definitionsgleichung (L1) abgelesen werden, da der Integrand in beiden Fällen ungerade ist.

d) Aus Gl. (L3) folgt, dass im Allgemeinen $t_x \neq 0$ gilt. Bei der Addition von Signalen addieren sich die mittleren Zeiten folglich *nicht*. Der Grund sind Kreuzterme, die durch die Quadrierung entstehen.

e) Das unverschobene Signal hat die mittlere Zeit t_x.

$$t_x = \frac{1}{E_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \, |x(t)|^2 \, dt$$

Durch Einsetzen in die Definition ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \, |x(t-T)|^2 \; dt &= \frac{1}{E_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\tau + T) \, |x(\tau)|^2 \; d\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{E_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau \, |x(\tau)|^2 \; d\tau}_{=t_x} + \frac{1}{E_x} \cdot T \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \; d\tau}_{=E_x} \\
&= t_x + T
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Exponentialfunktion

(Exponentialfunktion)

Gegeben ist folgendes Signal.

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|} \;, \quad \beta > 0$$

a) Zeichnen Sie das Signal für $\beta = 1$ im Zeit und Frequenzbereich.

b) Berechnen Sie die Energie E_x des Signals für ein beliebiges β. Handelt es sich um ein Energiesignal?

c) Berechnen Sie die ersten Momente der normierten Energiedichten und stellen Sie fest, in welchem Zeitpunkt t_x bzw. bei welcher Frequenz f_x sich das Signal konzentriert.

d) Bestimmen Sie die Zeitdauer Δ_t und die Bandbreite Δ_f.

e) Berechnen Sie die Unschärfe des Signals und vergleichen Sie diese mit der minimalen Unschärfe nach HEISENBERG.

Lösung

a) Gegeben ist folgendes Exponentialsignal.

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|} \;, \quad \beta > 0$$

In Abbildung L1 ist das Signal im Zeit- und Frequenzbereich dargestellt. Zur Darstellung im Frequenzbereich wird zu erst die Fouriertransformierte berechnet.

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\;dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta|t|}\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\;dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\beta t}\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\;dt + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\;dt \\
&= \frac{1}{\beta - j2\pi f}\cdot \mathrm{e}^{\beta t}\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-\beta - j2\pi f}\cdot \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\beta - j2\pi f} + \frac{1}{\beta + j2\pi f} \\
&= \frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

Für den Fall $\beta = 1$ findet sich das Ergebnis auch einfacher in einer Tabelle zur Fourier-Transformation.

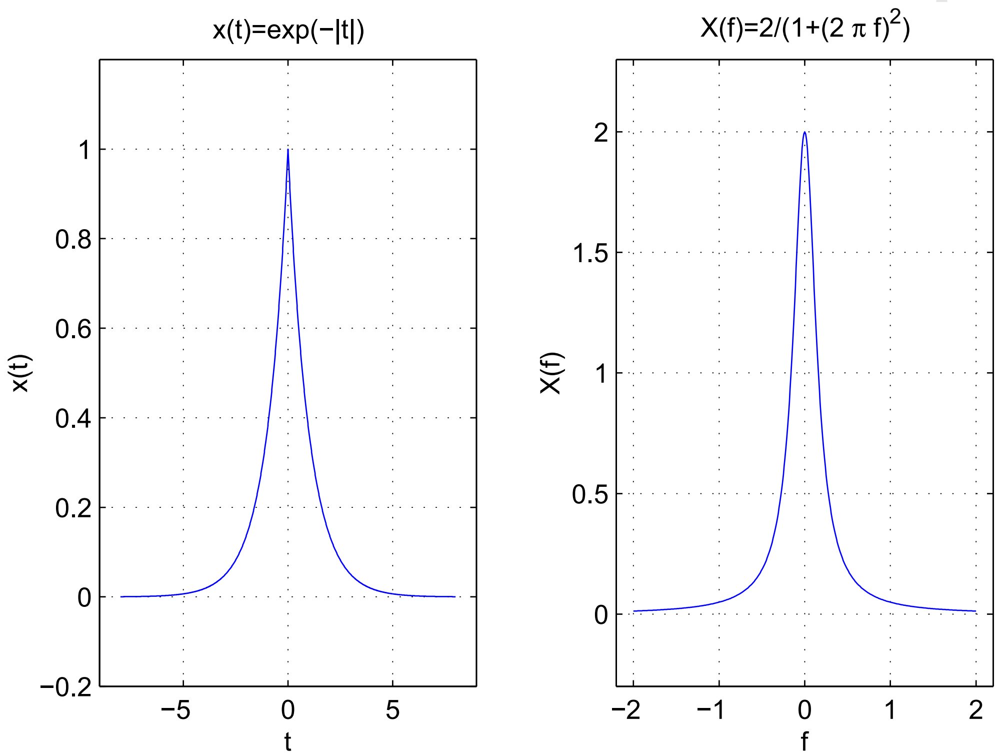

Abbildung L1: Exponentialfunktion im Zeit- und Frequenzbereich

b) Die gesamte Energie E_x des Signals erhält man durch die quadratische Norm im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}
E_x &= \|x(t)\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathrm{e}^{-\beta|t|} \right|^2 \, dt \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\beta t} \right)^2 \, dt \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta t} \, dt \\
&= 2 \, \frac{1}{-2\beta} \cdot \mathrm{e}^{-2\beta t} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

Da $E_x = \frac{1}{\beta}$ endlich ist, handelt es sich um ein Energiesignal.

c) Zur Berechnung von t_x :

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} t \left|\mathrm{e}^{-\beta|t|}\right|^2\, dt$$

Der Integrand stellt eine ungerade Funktion dar, deshalb folgt daraus:

$$t_x = 0$$

Für die mittlere Frequenz berechnet man analog:

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$
$$= \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} f \left|\frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}\right|^2 df$$

Durch analoge Betrachtung bekommt man auch hier das Ergebnis:

$$f_x = 0$$

d) Die Zeitdauer berechnet sich wie folgt:

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \, |x(t)|^2 \, dt$$
$$= \beta \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\mathrm{e}^{-\beta|t|}\right)^2 \, dt$$
$$= 2\beta \int_{0}^{\infty} t^2 \,\mathrm{e}^{-2\beta t} \, dt$$

Bestimmen der Stammfunktion, z. B. durch Bronstein Integral-Nr. 449:

$$\Delta_t^2 = 2\beta \cdot \left(\frac{t^2}{-2\beta} - \frac{2t}{(-2\beta)^2} + \frac{2}{(-2\beta)^3}\right) \cdot \exp(-2\beta t)\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$
$$= -2\beta \cdot \frac{2}{(-2\beta)^3} = \frac{1}{2\beta^2}$$

Anmerkung: $\lim_{t\to\infty} t^n \cdot \mathrm{e}^{-2\beta t} = 0$

Die Bandbreite lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta_f^2 &= \frac{1}{E_x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f-f_x)^2\,|X(f)|^2\;df \\
&= \beta\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2\left|\frac{2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}\right|^2 df \\
&= \beta\cdot(2\beta)^2\cdot 2\int\limits_{0}^{\infty} f^2\frac{1}{\left(\beta^2+(2\pi f)^2\right)^2}df \\
&= 8\beta^3\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f^2}{\left(\beta^2+(2\pi f)^2\right)^2}df
\end{aligned}$$

Durch Nachschlagen im Bronstein erhält man:

$$\begin{aligned}
\Delta_f^2 &= 8\beta^3\left[-\frac{f}{8\pi^2\left(\beta^2+(2\pi f)^2\right)}+\frac{1}{16\pi^3\beta}\cdot\arctan\left(\frac{2\pi f}{\beta}\right)\right|_0^\infty \\
&= \frac{\beta^2}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

e) Die Unschärfe berechnet sich wie folgt:

$$H_x = \Delta_f\cdot\Delta_t$$

$$H_x = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\cdot\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{8}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

Die minimale Unschärfe nach HEISENBERG ist gegeben mit

$$H_x \geq \frac{1}{4\pi}\,,$$

somit ist die der Exponentialfunktion um den Faktor $\sqrt{2}$ größer.

Aufgabe 3: Skalierung

(Skalierung)

Gegeben ist ein periodisches Signal $x(t)$ mit einer Frequenz von $f_0 = \frac{4}{\pi}$.

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Dieses Signal wird mit einem Rechteckfenster der Länge $T = \pi$ gefenstert. Anschließend wird das gefensterte Signal einmal mit $a_1 = 2$ und mit $a_2 = \frac{1}{2}$ skaliert.

a) Zeichnen Sie das gefensterte Signal $x^w(t)$, sowie die beiden skalierten Signale $x^w_{a_1}(t)$ und $x^w_{a_2}(t)$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der drei Signale $X^w(f)$, $X^w_{a_1}(f)$ und $X^w_{a_2}(f)$. Zeichnen Sie jeweils die Betragsfunktionen.

c) Bestimmen Sie die mittlere Zeit t_x der drei Signale $x^w(t)$, $x^w_{a_1}(t)$ und $x^w_{a_2}(t)$.

Lösung

a) Gegeben ist das unskalierte Signal:

$$x^w(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t) & |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } f_0 = \frac{4}{\pi}$$

Die Skizzen sind in Abbildung L2 zu sehen.

b) Berechnung der Fourier-Transformierten:

$$\begin{aligned} x^w(t) &= \sin(2\pi f t) \cdot r_T(t) \qquad \text{mit } T = \pi \\ \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X^w(f) &= X(f) * R_T(f) \\ &= \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)\right] * T\,\mathrm{sinc}(\pi f T) \\ &= T\frac{j}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\pi T(f+f_0)\right) - \mathrm{sinc}\left(\pi T(f-f_0)\right)\right] \end{aligned}$$

Beim Skalieren ergibt sich dann:

$$a = 2: \quad X^w_2(f) = 2X^w(2f)$$

und

$$a = \frac{1}{2}: \quad X^w_{\frac{1}{2}}(f) = \frac{1}{2}X^w(f/2)$$

Die entsprechenden Funktionen sind in den Abbildungen L3 und L4 zu sehen.

c) Berechnung der mittleren Zeit:

$$t_{x^w} = \frac{1}{E_{x^w}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot |x^w(t)|^2 \, dt = \frac{1}{E_{x^w}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\,|\sin(2\pi f_0 t)|^2 \, dt = 0$$

Bei der Skalierung ändert sich die mittlere Zeit mit dem Skalierungsfaktor multiplikativ:

$$t_{x,a} = a \cdot t_x$$

Daraus folgt, dass auch

$$t_{x,a_1} = t_{x,a_2} = 0$$

gilt.

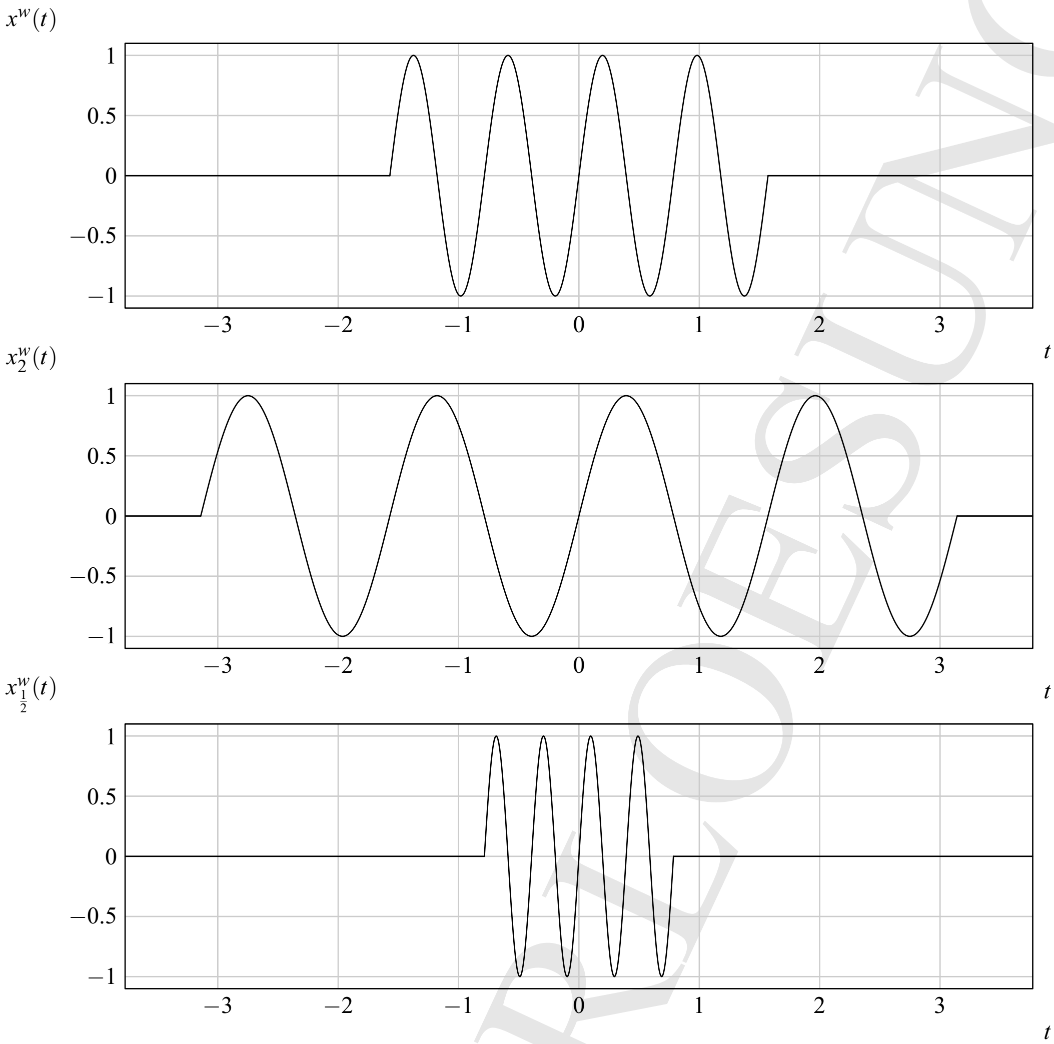

Abbildung L2: Skalierung des Signals mit $a = 1$, $a = 2$ und $a = 1/2$

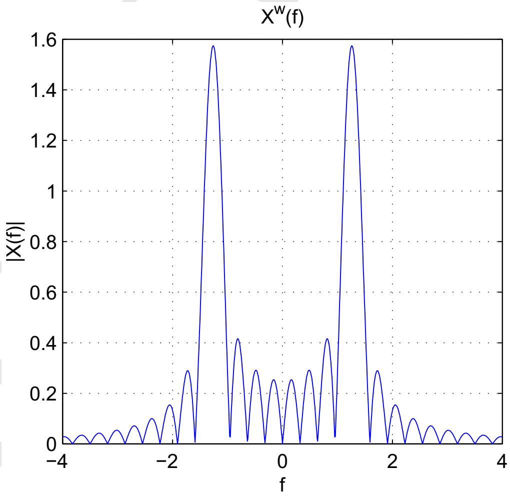

Abbildung L3: Betragsfourierspektrum der unskalierten Funktion

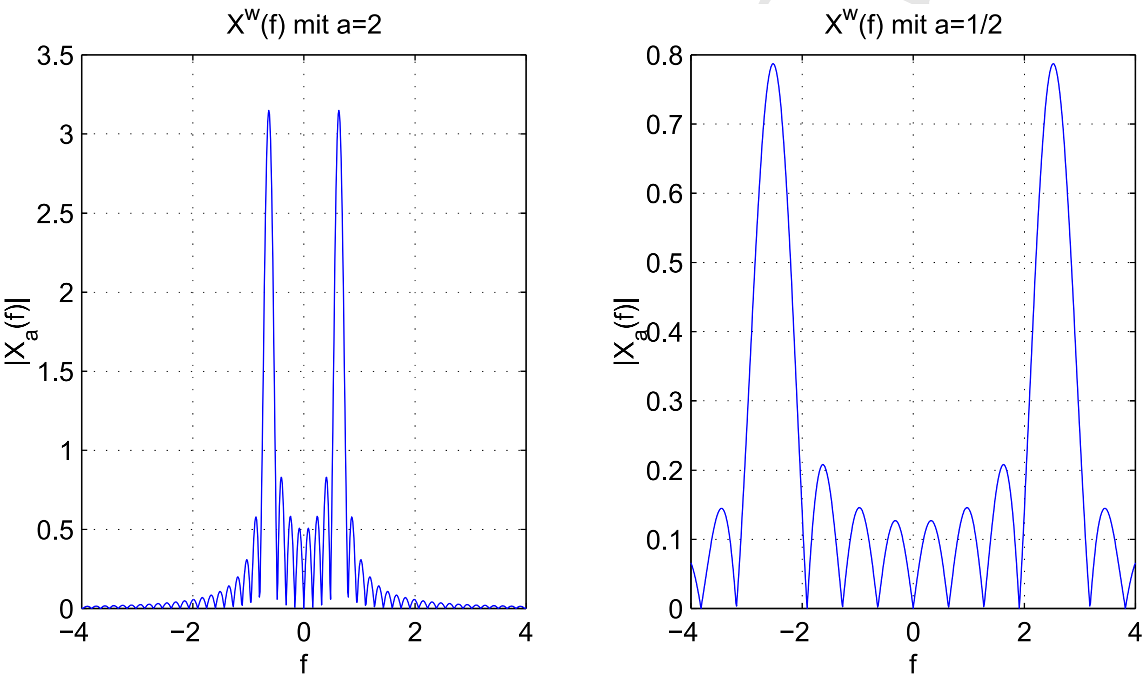

Abbildung L4: Betragsfourierspektrum der skalierten Signale

Aufgabe 4: Signaldarstellung in Funktionenräumen

(Signaldarstellung)

a) Zeigen Sie, dass die zeitverschobenen Rechteckimpulse

$$\varphi_n(t) = r_T(t - nT) \qquad n = 1, \dots, N$$

eine orthogonale Basis bilden. Berechnen Sie die Koeffizienten a_n der Basisentwicklung eines Signals $x(t)$. Wie lassen sich diese anschaulich interpretieren?

b) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Basis die Frame-Bedingung

$$0 < A \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

erfüllt. Wie lauten die Frame-Faktoren A und B?

c) Zeigen Sie folgenden Zusammenhang: Wenn sich in einem Funktionensystem $\{\varphi_n(t), n = 1, \dots, N\}$ die Funktion $\varphi_N(t)$ als Linearkombination der anderen Funktionen darstellen lässt

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \varphi_n(t)$$

dann ist die Gramsche Matrix singulär.

Lösung

a) Zunächst wird das Innenprodukt

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t - mT) \cdot r_T(t - nT)\, dt$$

berechnet. Dabei werden zwei Fälle unterschieden:

1. Für $m \neq n$ überschneiden sich die Funktionen im Integrand nicht. Das Innenprodukt ist daher gleich 0.
2. Für $m = n$ sind die Funktionen identisch. Das Innenprodukt entspricht der Signalenergie:

$$\langle \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle = \|\varphi_n(t)\|^2 = \int_{t=nT-T/2}^{nT+T/2} 1\, dt = T$$

Insgesamt gilt somit für das Innenprodukt:

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle = T \cdot \delta_{mn}$$

Für die Gramsche Matrix folgt: $\mathbf{G} = T \cdot \mathbf{I}$.

Die Koeffizienten der Reihenentwicklung lauten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N(t) \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \cdot \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N(t) \rangle \end{bmatrix}$$

Ein einzelner Koeffizient ergibt sich daher als

$$a_n = \frac{1}{T}\big\langle x(t), \varphi_n(t)\big\rangle = \frac{1}{T} \int\limits_{t=nT-T/2}^{nT+T/2} x(t)\,dt$$

Dies entspricht dem Mittelwert des Signals im Intervall $[nT - T/2, nT + T/2]$.

b) Bei einer orthogonalen Basis sind nur die Elemente der Hauptdiagonalen der Gramschen Matrix von Null verschieden. Für das Innenprodukt zweier Basisfunktionen gilt daher:

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t)\rangle = \begin{cases} \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t)\rangle & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t)\rangle \cdot \delta_{mn} = \|\varphi_n(t)\|^2 \cdot \delta_{mn}$$

Das Signal $x(t)$ wird mit Hilfe der Basisfunktionen dargestellt:

$$x(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$$

Es soll ein Zusammenhang zwischen der Signalenergie und der Koeffizientenenergie hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
\langle x(t), x(t)\rangle &= \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varphi_m(t), \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m a_n^* \langle \varphi_m(t), \varphi_n(t)\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m a_n^* \cdot \|\varphi_n(t)\|^2 \cdot \delta_{mn} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\varphi_n(t)\|^2 \cdot |a_n|^2
\end{aligned}$$

Die Summe wird nach unten und oben abgeschätzt:

$$\min_n \|\varphi_n(t)\|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\varphi_n(t)\|^2 \cdot |a_n|^2}_{=\|x(t)\|^2} \leq \max_n \|\varphi_n(t)\|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

Daraus folgt die Frame-Bedingung:

$$0 < \underbrace{\frac{1}{\max\limits_n \|\varphi_n(t)\|^2}}_{=:A} \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq \underbrace{\frac{1}{\min\limits_n \|\varphi_n(t)\|^2}}_{=:B} \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

c) Die Gramsche Matrix des Funktionensystems lautet:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t)\rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t)\rangle & \dots & \langle \varphi_N(t), \varphi_1(t)\rangle \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t)\rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t)\rangle & \dots & \langle \varphi_N(t), \varphi_2(t)\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_N(t)\rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_N(t)\rangle & \dots & \langle \varphi_N(t), \varphi_N(t)\rangle \end{bmatrix}$$

Die Elemente der letzten Spalte werden umgeformt:

$$\langle \varphi_N(t), \varphi_n(t) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(t), \varphi_n(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \langle \varphi_i(t), \varphi_n(t) \rangle$$

Im letzten Schritt wurden dabei die Rechenregeln IP3 und IP4 für Innenprodukte angewandt:

IP3: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

IP4: $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Das Ergebnis dieses Aufgabenteils beschränkt sich daher nicht nur auf Funktionenräume, sondern gilt für beliebige Hilberträume.

Wird dieses Ergebnis in die Gramsche Matrix eingesetzt

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle & \dots & \sum_{i=1}^{N-1} a_i \langle \varphi_i(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle & \dots & \sum_{i=1}^{N-1} a_i \langle \varphi_i(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_N(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_N(t) \rangle & \dots & \sum_{i=1}^{N-1} a_i \langle \varphi_i(t), \varphi_N(t) \rangle \end{bmatrix},$$

so wird offensichtlich, dass die letzte Spalte der Matrix eine Linearkombination der übrigen Spalten ist. Die Determinante wird damit zu Null, d. h. die Gramsche Matrix ist singulär und damit nicht invertierbar. Das Funktionensystem bildet keine Basis.